APUNTES SOBRE

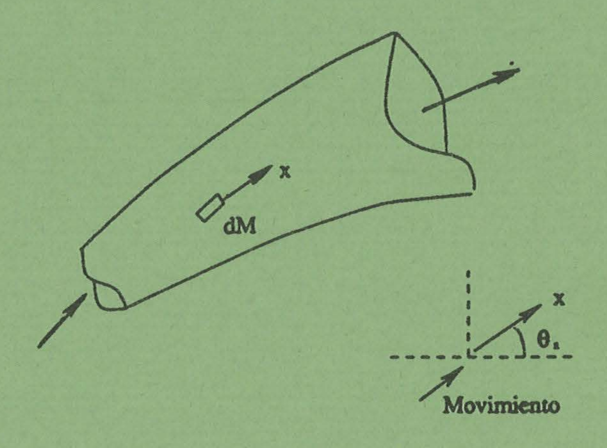
ELEMENTOS DE MECÁNICA CLÁSICA DE FLUIDOS

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO

Y

Mª DOLORES REDONDO ALVARADO



CUADERNOS DE *APOYO A LA DOCENCIA* DEL INSTITUTO JUAN DE HERRERA DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

Cuaderno 20
ISBN: 84-89977-19-4
Depósito Legal: M-10988-1998

ÍNDICE

1. LOS FLUIDOS EN LA NATURALEZA

1.1. Introducción.

La teoría física *Mecánica Clásica de Fluidos* que estudiamos en esta ocasión, según nuestro esquema ya usual acerca de la concepción de la Naturaleza que tiene la Física Clásica se expresa con nitidez en la segunda línea del cuadro siguiente.

Esquema general de la Naturaleza que considera la Física Clásica

NATURALEZA	COSA	ACAECIMIENTO	LEYES OBJETIVAS
MEC. CLASICA FLUIDOS	FLUIDO	MOVIMIENTO	LEYES DEL MOV. DE FLUIDOS

La COSA a estudiar son los fluidos y en/de ellos como ACAECIMIENTO sólo el movimiento; es decir, el *objeto* de la *Mecánica Clásica de Fluidos* es el estudio del *movimiento de los fluidos*.

1.2. Los fluidos: naturaleza.

En el *nivel lingüístico* con el término 'fluido' nos referimos a una entidad real, de la Naturaleza, material, a los fluidos, con existencia en el nivel lógico de 'realidad'.

En el *nivel conceptual* se construye un concepto, "fluido", que se refiere también a esa entidad real. El concepto debe caracterizar tanto como se pueda, tan bien como se pueda a la entidad real.

El *referente* -nivel de realidad- lo constituyen las substancias (materia) con capacidad de fluir, de adaptarse -con más o menos dificultades- a la forma de los recipientes que los contienen. La *dificultad* para fluir se explica mediante la propiedad denominada *viscosidad*.

De los estados de agregación clásicos (fases) de la materia: sólido, líquido y gas, se consideran fluidos los líquidos y los gases. Los líquidos quedan prácticamente definidos en volumen y forma por el recipiente que los contiene y por la superficie libre. Los gases tienden a ocupar todo el espacio disponible, se expansionan tanto como les es posible.

Los fluidos se caracterizan, clásicamente y en primer lugar, por un conjunto de propiedades macroscópicas, observables, medibles; a éstas se referirán las magnitudes -conceptos magnitudinales- de la teoría.

El *recipiente* que los contiene puede ser, por ejemplo, desde un vaso (para un líquido, con superficie libre) o una bombona (de gas, a una determinada presión), Fig. 1.1, hasta, por ejemplo, la parte sólida de la Tierra en tanto que recipiente de los fluidos agua (océano) y aire (atmósfera). Véase Fig. 1.2.

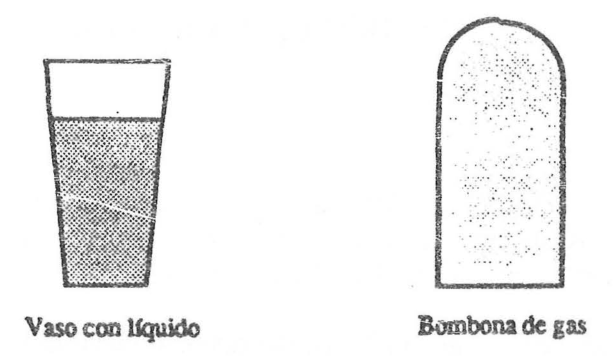


Fig. 1.1. Recipientes con fluidos.

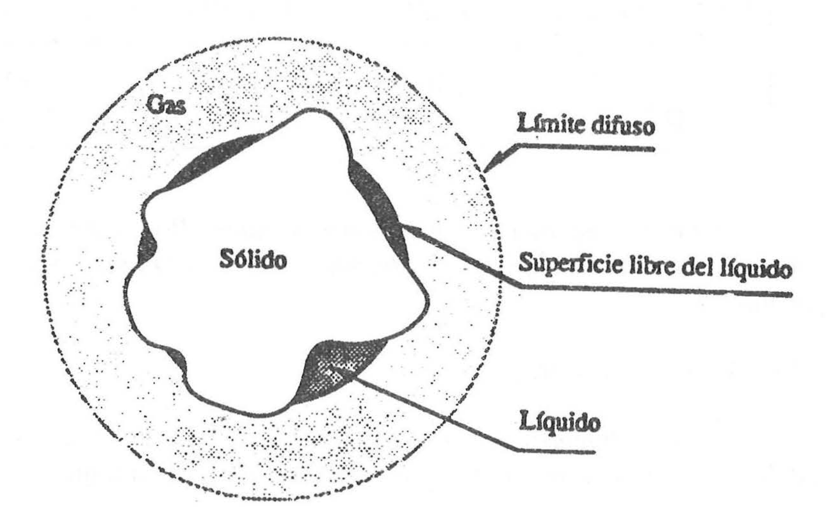


Fig. 1.2. Sección meridiana del planeta Tierra. La parte sólida interior constituye el recipiente del agua de los océanos y, con ésta, de la atmósfera gaseosa.

1.3. Los fluidos: el movimiento.

El acaecimiento (hecho, proceso, fenómeno) objeto de estudio de la mecánica es el movimiento.

Entre los ejemplos naturales de movimiento de movimiento de fluidos pueden considerarse los siguientes:

Viento.
Corrientes marinas.
Río.
Agua cayendo por una cascada.
Colas de aire de avión.
Fuego.
Humo.

Interesa especialmente destacar la complejidad y el caos de los campos de velocidades y aceleraciones en el movimiento real de los fluidos.

Este hecho obliga a considerar hipótesis descriptivas simplificadoras.

2. EXPERIENCIAS SINGULARES RELATIVAS A LOS FLUIDOS

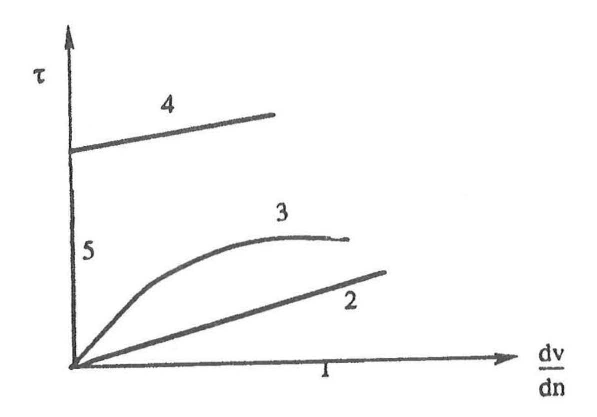
En este segundo tema se pretende dar un paso más en el conocimiento de los fluidos, ahora desde la EXPERIMENTACIÓN; es decir, observando experiencias creadas, concebidas por el hombre.

2.1. Diagrama reológico.

Se trata de una experiencia globalizadora, en la que se consideran, entre otros, como principales, dos conceptos complejos: la *tensión tangencial, cortante o de cizalladura* y el *gradiente de velocidades en dirección transversal a dicho esfuerzo*. Supone la aceptación de muchos conceptos y se refiere a los diferentes tipos de substancias. Permite una primera clasificación -clara- de las substancias.

La representación de la Fig. 2.1. se denomina *diagrama reológico* y en él se diferencia el comportamiento de distintos materiales, objetos de estudio -referentes- de distintas *teorías físicas clásicas del continuo.*

Se considera la tensión tangencial, paralela a la velocidad (movimiento o desplazamiento relativo), que se define por $\tau = \frac{F}{S}$, siendo F una fuerza paralela a la velocidad y S también paralela a ambas. De las experiencias resulta la representación esquemática de la figura para los distintos materiales que se enumeran en ella y se denominan al margen.



1. Fluido ideal
2. Fluido newtoniano
3. Fluido real
4. Material plástico (fluencia)
5. Sólido elástico (no fluencia)

Fig. 2.1. Diagrama reológico.

El caso del *fluido newtoniano* se representa por la recta (2) a la que corresponde la ecuación

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dn}$$

donde μ, denominada *viscosidad*, es constante -la pendiente de la recta-.

En el caso de *fluido real* no newtoniano (3) la viscosidad μ no es constante; puede decirse que no es independiente de ϕ (tensión tangencial aplicada).

En el caso de *fluido ideal* (1), la viscosidad es nula, $\mu = 0$.

En el caso de *sólido elástico* no hay *fluencia* (separación de unos elementos -moléculas, partículas, filetes, venas- respecto de los adyacentes) sino *deformación*.

El *sólido plástico* presenta *fluencia*; se alcanza este estado cuando se supera una determinada tensión.

2.2. Experiencia de turbulencias.

Experiencia de turbulencia (movimiento caótico, errático) mediante introducción de una línea de colorante por un tubito capilar en una corriente fluida.

Análisis de la complejidad y caos.

3. PREFISICA

3.1. Elementos prefísicos de naturaleza matemática[1].

La Mecánica Clásica de Fluidos asume las siguientes disciplinas matemáticas.

1. *Estructuras algebraicas reales*[2], para la construcción de las magnitudes físicas.

2. *Geometría métrica euclídea.*

3. *Teorías matemáticas del continuo* (del número real): análisis matemático, teoría de funciones, análisis vectorial y tensorial[3].

---

1 Nos limitamos a introducir el tema.

2 Pueden verse las obras *Estructuras algebráicas tensoriales* y *Problemas de estructuras algebráicas tensoriales* del Catedrático F. González de Posada. Alhambra. Madrid.

3 Pueden verse las obras: *Teoría de campos escalares y vectoriales*, *Problemas de campos escalares y tensoriales* y *Problemas de análisis tensorial* del Catedrático F. González de Posada.

4. PROTOFISICA

4.1. Elementos de Protofísica[4].

Protofísica de una teoría física es la física antigua, anterior -de otra teoría preexistente-, que se asume en esta teoría física. La *Mecánica Clásica de Fluidos* acepta, entre otras, las nociones y teorías que se explicitan a continuación.

Espacio absoluto, con su métrica espacial.

Tiempo absoluto, con su métrica temporal.

Materia, con su métrica másica.

Fluido: líquido y gas.

La *mecánica newtoniana* (mecánica: ciencia -física- del movimiento). Es decir, materia en movimiento, pero sólo en movimiento (no calor, no temperatura, no reacciones químicas,...).

La *teoría elemental de gases*[5].

4.2. Naturaleza de teoría física derivada de la mecánica newtoniana.

Como consecuencia de lo anterior, puede afirmarse que la *Mecánica Clásica de Fluidos* es una *teoría física derivada* de la Mecánica Clásica (Dinámica newtoniana), tal que: primero, acepta los conceptos primitivos y los enunciados legaliformes (las leyes relacionales y los principios ecuacionales) de la Mecánica Clásica en su integridad; y, segundo, aumenta -completa- los conceptos (físicos) que se refieren a propiedades de la Naturaleza (de la materia, de las substancias en fases líquida y gaseosa), aportando nuevos enunciados legaliformes relativos a las propiedades características.

---

[4] Nos limitamos a introducir el tema.

[5] Puede verse nuestro pre-texto *Teorías termológicas pre-termodinámicas*. ETSAM.

5. CONCEPTOS PRIMITIVOS NO MAGNITUDINALES

5.1. Relación sintética de algunos conceptos primitivos[6].

Nos referimos a conceptos de clase, cualitativos, básicos o primitivos, indefinidos, carentes de naturaleza magnitudinal. Son, por ejemplo, y entre otros que conviene destacar, los siguientes:

Espacio (referencial).

Tiempo (referencial).

Materia.

Estado de agregación (variable cualitativa). *Fase.*

Transición de fase.

Fluido: líquido y gas.

Cuerpo sólido, en tanto que límite o pared del recipiente contenedor del fluido: recipiente (contorno exterior) o cuerpo sumergido (contorno interior).

---

6 Nos limitamos a introducir el tema.

6. CONCEPTOS PRIMITIVOS MAGNITUDINALES: LAS MAGNITUDES FISICAS DE LA TEORIA CLASICA

6.0. Generalidades.

Los conceptos primitivos magnitudinales son los representativos de las propiedades cuantificables, medibles, denominados *magnitudes*. De ordinario, toda clasificación tiene siempre algún interés por su carácter clarificador de conceptos. A nuestro juicio, tienen especial interés aquellas clasificaciones que dividen el conjunto en subconjuntos disjuntos. Haremos el intento de clasificar las magnitudes que utiliza la *Mecánica Clásica de Fluidos* con tanta claridad como nos sea posible.

6.1. Magnitudes propias (generales) de la Mecánica Clásica.

Las *magnitudes primarias* de la Mecánica Clásica, con sus símbolos dimensionales, son[7]:

d	distancia, con su métrica espacial	L, S, V
Δt	intervalo de tiempo, con su métrica temporal	T
m	masa (inercial), con su métrica másica	M
G	constante universal gravitatoria	G
$\vec{f}$	fuerza	F

También hereda la Mecánica de Fluidos los conceptos magnitudinales derivados o *magnitudes secundarias* de la teoría Mecánica Clásica. Éstos, entre otros, son:

densidad	$\rho = \dfrac{m}{V}$ ó $\rho = \dfrac{dm}{dV}$
velocidad	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{s}}{dt}$
cantidad de movimiento	$m\vec{v}$
energía cinética	$E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$
aceleración	$\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{s}}{dt^2}$
peso	$p = mg$
peso específico	$\gamma = \dfrac{p}{V}$ ó $\gamma = \dfrac{dp}{dV}$

---

7 Habría que añadir la *masa gravitatoria*. (Puede verse el pre-texto *Guías de estudio del Curso de Teoría Dimensional* del Catedrático F. González de Posada). No obstante, como es usual en los textos de Mecánica, se considera sólo la *masa inercial* en la línea de prescindir de la *masa gravitatoria* mediante utilización de la constante gravitacional G: $m_g = \sqrt{G}\, m_i$.

energía potencial $E_p = mg\Delta h$

trabajo $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$

potencia $P = \dfrac{W}{t}$

6.2. Magnitudes heredadas con especial relevancia.

Consideramos como magnitudes *heredadas* de la *Mecánica Clásica* con *especial relevancia* en la *Mecánica Clásica de Fluidos* a aquellas magnitudes mecánicas no generalmente compartidas[8], no generales y que tienen mayor utilidad en tanto que pueden concebirse como 'propiedad' de los fluidos. Son la *densidad* y el *peso específico.*

6.2.1. Densidad.

Densidad es la masa de la unidad de volumen. Es una propiedad característica (representativa) de los fluidos, ya que indica cuantitativamente una propiedad cualitativa; la masa es una propiedad cuantitativa, sólo aditiva, no directamente cualitativa. La densidad en tanto que magnitud intensiva es más definitoria de la materia, la masa de la cantidad de materia.

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad \rho = \frac{dm}{dV} \tag{6.1}$$

La fórmula dimensional es : $[\rho] = ML^{-3}$ y se utilizan como unidades usuales: kg/m^3 y g/cm^3. En el sistema técnico: u.t.m./m^3.

La densidad del agua (a 4 °C) es:

a) en el sistema técnico: 1000/9'81 u.t.m./m^3 $\approx$ 102 u.t.m./m^3

b) en el C.G.S.: 1 g/cm^3

A veces se considera la *densidad relativa*, concepto derivado o secundario también que se introduce como número o parámetro adimensional (independiente, por tanto, de las unidades) de las formas siguientes:

a) Para sólidos y líquidos:

$$\rho_r = \frac{\textit{peso de una substancia}}{\textit{peso de igual volumen de agua (a 4°C)}}$$

b) Para gases:

$$\rho_r = \frac{\textit{peso del gas}}{\textit{peso del aire sin } CO_2 \textit{ ni } H_2O \textit{ (a 0°C y a 1 atm)}}$$

Conviene destacar que, en general, la densidad de un fluido en movimiento puede

---

8 Por ejemplo en la *Dinámica del punto material* o en la *Mecánica del sólido rígido*.

expresarse como función de punto y tiempo, $\rho(P,t)$.

6.2.2. Peso específico.

Es el peso de la unidad de volumen del fluido.

$$\gamma = \frac{dP}{dV} \tag{6.2}$$

Depende de la gravedad del lugar; de aquí su consideración de menor importancia teórica -en sí misma- que la densidad.

$$\gamma = \frac{dP}{dV} = \frac{d(mg)}{dV} = \frac{dm}{dV} g = \rho g \tag{6.3}$$

La fórmula dimensional es: $[\gamma] = [P][V]^{-1} = MLT^{-2}L^{-3} = ML^{-2}T^{-2}$ y las unidades usuales: $\frac{kg_f}{m^3}$ y $\frac{T_f}{m^3}$

El peso específico del agua en las aplicaciones usuales (a 4 °C) se expresa:

$$\gamma_{agua} = 1000 \frac{kg_f}{m^3} = 1 \frac{T_f}{m^3} = 1 \frac{kg_f}{dm^3}$$

En los líquidos se acepta la hipótesis que el peso específico es constante para variaciones ordinarias de presión.

En los gases hay que tener en cuenta la ecuación de estado. Para los gases ideales, por ejemplo, el volumen se expresa

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{m} \frac{RT}{p}$$

que indica la dependencia del volumen con la presión, $V = V(p,T)$.

6.3. En torno a la magnitud mecánica específica de los fluidos: la presión.

La presión es una propiedad que se manifiesta en el seno de los fluidos. La manera más correcta en términos formales de introducirla, respecto de magnitudes primarias de la Mecánica Clásica, es mediante la consideración de un tensor P de segundo orden simétrico de elementos reales e isotrópico[9]; es decir:

$$d\vec{F} = \mathcal{P}\, d\vec{S} \tag{6.4}$$

donde $\mathcal{P}$ puede considerarse como *causa* de que, si existe una superficie sólida orientada $\vec{S}$, se

[9] Véase, por ejemplo, nuestra obra *Teorías termológicas pre-termodinámicas*. ETSAM

genere un *efecto*, una fuerza $\vec{F}$ normal a la superficie (es decir, paralela a $\vec{S}$).

La presión se transmite por igual en todas direcciones (tensor isótropo) y actúa normal a cualquier superficie plana. Desde una perspectiva escalarizada la componente del tensor se expresa de la forma

$$p = \frac{F}{S} \tag{6.5}$$

donde F es normal a la superficie S.

La fórmula dimensional es $[p] = [F][S]^{-1} = MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

y las unidades usuales: 1 Pa = 1 N/m^2, 1 kg_f/m^2, y 1 atm; de modo que

$$1\ atm = 1'031 \text{x} 10^5\ N/m^2; \text{ y}$$

$$1\ Pa = 9'87 \text{x} 10^{-6}\ atm$$

Principio de Pascal. En un plano horizontal de una misma masa continua fluida (líquido) la presión es igual en todos los puntos.

Manómetro. Es un aparato que mide presiones relativas (diferenciales) con respecto a la presión atmosférica, presiones que reciben el nombre de presiones manométricas.

$$p_{man} = p_{abs} - p_{atm} \tag{6.6}$$

La presión en un punto interior de un fluido puede considerarse como el peso de la parte superior por unidad de superficie; es decir:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\gamma V}{S} = \gamma h$$

Diferencia de presiones entre dos puntos a distinto nivel en el seno de un líquido, suponiendo γ constante, es

$$p_2 - p_1 = - \gamma\ (h_2 - h_1)$$

Por tanto:

$$\Delta p = - \gamma\ \Delta h$$

La diferencia de presiones en un fluido compresible puede expresarse de la forma:

$$dp = - \gamma\ dh \tag{6.7}$$

De aquí se deduce el concepto de *altura de presión* tan interesante en Hidrostática, que representa la altura de una columna de fluido homogéneo consecuencia de la presión considerada.

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{p}{\gamma} \tag{6.8}$$

La presión atmósférica es p_{atm} = 1 atm = 1'033 kg/cm^2 = 760 $mm\ Hg$.

6.4. Magnitudes específicas o características.

Se denominan magnitudes *específicas* o *características* de los fluidos las relativas a las propiedades del fluido con naturaleza de 'constantes características'. Entre éstas también podrían considerarse la densidad y el peso específico, como hemos indicado en el parágrafo 6.2.

6.4.1. Viscosidad.

1. Respecto del *referente* (Naturaleza, realidad) puede decirse que es una propiedad de los *fluidos reales* (macroscópica, "observable", clásica) que se interpreta/se manifiesta/se conoce como:

a) resistencia que opone el fluido (capacidad de fluir: de adaptarse a la forma del recipiente que lo contiene) a cambiar de forma.
b) dificultad de moverse.
c) impedimento a "fluir".
d) manifestación de rozamiento interior en el seno del fluido, de cizalladura, de fricción.
e) causa de pérdida de energía a lo largo del movimiento (disipación energética por fricción interna).

Se observa que los líquidos son muy viscosos y que los gases son poco viscosos.

Los resultados de una experiencia general singular del comportamiento de las substancias (cuerpos) se reproducen en el denominado *diagrama reológico* ya tratado en el capítulo 2.

2. En cuanto *concepto físico* (que se refiere a lo anterior de la Naturaleza) puede caracterizarse por las siguientes notas.

a) Se introduce formalmente a partir de la ley experimental, recta (2) del diagrama reológico, acerca del comportamiento de los *fluidos newtonianos* (Fórmula de Newton),

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dn} \tag{6.9}$$

donde

$\tau = F/S$ es la tensión de cizalladura o cortante sobre una hipotética superficie paralela al movimiento;

dv/dn es el gradiente de velocidades según la normal a dicha superficie;

μ la viscosidad dinámica.

- es el signo que indica que la propiedad frena el movimiento.

b) Es una *constante característica* de los fluidos y *constante dimensionada*, cuya fórmula dimensional puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\frac{[F]}{[S]} = [\tau] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = [\mu]\,\frac{LT^{-1}}{L}$$

es decir,

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1} \tag{6.10}$$

Las *unidades* usuales son:

a) en el sistema SI : 1 (N/m^2).s = 1 Pa.s = 1 Poiseuille

b) en el CGS : 1 $(dina/cm^2)$.s = 1 baria.s = 1 poise

c) Tiene, usualmente, naturaleza algebraica escalar real. No obstante, admite -con más rigor formal- una interpretación tensorial de segundo orden.

d) Es una **variable física dependiente,** función de diferentes variables, tales como: temperatura, presión, tensión tangencial. No obstante, de ordinario, se considera 'constante' para un determinado fluido.

Nota complementaria. El **fluido ideal** se caracteriza fundamentalmente como carente de viscosidad; es decir, de viscosidad nula (eje de abscisas en el diagrama reológico).

3. Tipos de viscosidad.

1. *Viscosidad dinámica* (μ) o absoluta.

2. *Viscosidad cinemática* (ν), que se define:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{6.11}$$

siendo ρ la densidad del fluido. Su fórmula dimensional es:

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = L^2\,T^{-1} \tag{6.12}$$

y la unidad, 1 *Stokes* = 1 cm^2/s.

3. *Viscosidad relativa* (μ_r) que suele definirse respecto del agua (en los líquidos) y respecto del aire (en los gases), de modo que

$$\mu_r = \mu/\mu_{agua} \quad ; \quad \mu_r = \mu/\mu_{aire}$$

4. *Fluidez*. Se denomina *fluidez*, a veces, a la inversa de la viscosidad.

6.4.2. Compresibilidad y módulo de elasticidad volumétrico.

Se denomina *coeficiente de compresibilidad* a la variación relativa de volumen ocasionada por una variación de presión. Es decir,

$$k = -\frac{\dfrac{dV}{V}}{dp} \tag{6.13}$$

La fórmula dimensional es: $[k] = [p]^{-1}$

Se define como *módulo de elasticidad volumétrico* al inverso de k; es decir,

$$E = - \frac{dp}{\frac{dV}{V}} \tag{6.14}$$

El signo - se introduce para que tanto E como k sean positivos, ya que el aumento de presión implica disminución de volumen (y la disminución de presión, aumento de volumen).

Son índices de la compresibilidad del fluido y constituyen -según el punto de vista que se adopte- una (o dos) *constante(s) característica(s)* del fluido.

Usualmente se elige el módulo de *elasticidad volumétrica* cuando de alguna manera interesa relacionar el comportamiento de los fluidos con el de los sólidos elásticos, por su analogía con el *módulo de elasticidad*, como se pone de manifiesto en la expresión:

$$dp = - E \frac{dV}{V} \tag{6.15}$$

E tiene dimensiones de presión.

La **compresión en los gases** se considera tema termológico. Para una masa determinada de gas ideal en dos estados diferentes, 1 y 2, de la ecuación de estados de los gases ideales

$$pV = nRT \tag{6.16}$$

donde n es constante (y R también) se deduce

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

a) En un *proceso isotermo* de un gas ideal, resulta

$$pV = cte \rightarrow p\,dV + V\,dp = 0 \rightarrow dp + p\frac{dV}{V} = 0$$

de modo que contrastando con la ec.(6.15) se deduce:

$$E = p \tag{6.17}$$

b) En un *proceso adiabático* (o isentrópico reversible)

$$pV^k = cte \tag{6.18}$$

donde

$$K = \frac{c_p}{c_v} \tag{6.19}$$

es el *coeficiente adiabático* del gas, resulta

$$pkV^{k-1}dV + V^k dp = 0$$

$$dp + pk\frac{dV}{V} = 0$$

de modo que contrastando con la ec.(6.15) se deduce

$$E = pk \tag{6.20}$$

diferente a (6.17), aunque E tiene también las dimensiones de presión ya que k es adimensional.

Una manifestación de la compresibilidad de los fluidos es la ***celeridad de propagación de las perturbaciones de presión (u ondas elásticas).***

Las perturbaciones mecánicas en el seno de un fluido se propagan en forma de ondas de presión con velocidad igual a la de propagación del sonido a través de un fluido.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{6.21}$$

La fórmula dimensional es:

$$[c] = [E]^{\frac{1}{2}}[\rho]^{-\frac{1}{2}} = [p]^{\frac{1}{2}}[\rho]^{-\frac{1}{2}} = [FL^{-2}]^{\frac{1}{2}}[ML^{-3}]^{-\frac{1}{2}} = [MLT^{-2}L^{-2}]^{\frac{1}{2}}[ML^{-3}]^{-\frac{1}{2}} = M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}M^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}} = LT^{-1}$$

es decir, c tiene dimensiones de velocidad, y de ahí su nombre.

En los gases, en la hipótesis de *proceso adiabático*, se expresaría, de acuerdo con (6.20), por:

$$c = \sqrt{\frac{pk}{\rho}} \tag{6.22}$$

6.4.3.Tensión superficial.

Es una *propiedad* que se manifiesta en la *superficie de separación líquido-gas*. Este 'efecto de película' se interpreta como debido a la existencia de unas **fuerzas de cohesión** intermoleculares (Fig. 6.2) tales que:

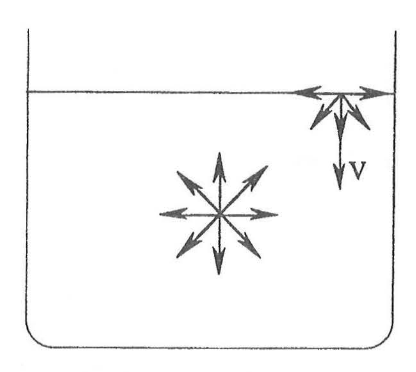


Fig. 6.2. Fuerzas de cohesión.

a) en el interior de la masa líquida: $\vec{R}_{centro\ masa} = \vec{0}$

b) en la superficie de separación: $\vec{R}_{superficie} = \vec{V} \downarrow$

Esta fuerza superficial 'hacia dentro' supone un almacenamiento de energía potencial en la superficie libre. Así, se considera la tensión superficial como

$$\sigma = \frac{dU_{pot}}{dS} \tag{6.23}$$

es decir, densidad superficial de la energía potencial de la superficie.

Esta propiedad, la *tensión superficial*, es causa de los fenómenos siguientes: 1) capilaridad; 2) formación de gotas líquidas; y 3) formación de láminas líquidas delgadas.

1. Se denomina ***capilaridad*** a la capacidad de ascenso o descenso de un líquido en un capilar (o medio poroso) por efecto de la tensión superficial. Depende de la *cohesión del líquido* y de la *adherencia líquido-sólido* (del líquido a las paredes).

a) Si la *cohesión* es mayor que la *adherencia*: descienden.

b) Si la *cohesión* es menor que la *adherencia*: ascienden. (Este segundo caso es el causante de las **humedades** usuales en las edificaciones).

En la línea de contacto sólido-superficie libre se considera una fuerza distribuida tangente al menisco, definida por la fórmula

$$F = \sigma\, l \tag{6.24}$$

que se utiliza como la fórmula que introduce la propiedad característica tensión superficial, σ, de modo que la fórmula dimensional de ésta es

$$[\sigma] = [F]L^{-1} = MLT^{-2}L^{-1} = MT^{-2} \tag{6.25}$$

El ascenso y el descenso capilar se estudian mediante el equilibrio de las fuerzas capilares (tensión superficial) y de peso. Apliquémoslo a los ejemplos siguientes.

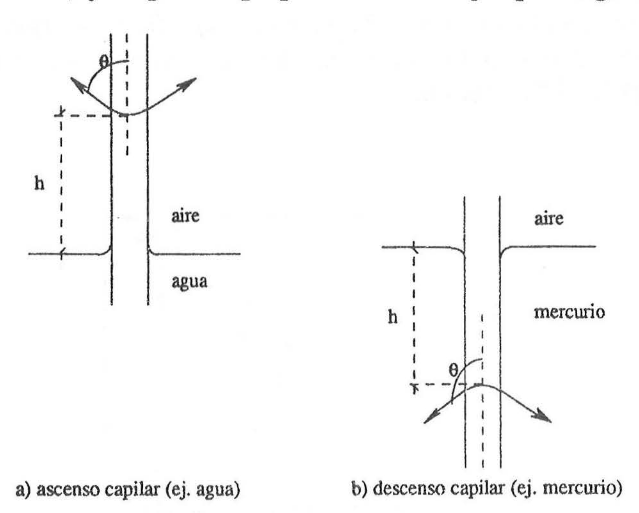


Fig. 6.3. Capilaridad en tubos de vidrio.

En el caso del agua (algebraicamente positivo desde la tensión superficial):

$$F_{cap}\uparrow = \sigma . 2\pi r . \cos\theta = \pi r^2 h \rho g = V\gamma = P\downarrow$$

de donde se deduce

$$h = \frac{2\pi r \sigma \cos\theta}{\pi r^2 \rho g} = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r} \qquad (6.26)$$

de modo que:

Si $\theta < \frac{\pi}{2}$, $h > 0 \Rightarrow$ *ascenso*

Si $\theta > \frac{\pi}{2}$, $h < 0 \Rightarrow$ *descenso*

El ascenso/descenso capilar constituye un método para la medida de la tensión superficial.

2. Las **superficies libres** se estudian en su relación con las *sobrepresiones* de cohesión mediante la **ecuación de Laplace**

$$p_{int} - p_{ext} = \Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (6.27)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura principales de la superficie.

3. Las **membranas líquidas**, análogamente, pero teniendo en cuenta que poseen dos superficies (dos caras), mediante la ecuación:

$$p_{int} - p_{ext} = \Delta p = 2\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (6.28)$$

En la formación de las **gotas líquidas**, con forma convexa e incluso esférica, se pone de manifiesto que las fuerzas de masa tienen una acción secundaria respecto de las de tensión superficial.

Las **láminas líquidas delgadas**, (ejemplo: una pompa de jabón) de pequeño volumen respecto de su superficie, deben su equilibrio a la acciones como fuerzas predominantes de la tensión superficial y de la diferencia de presiones interior-exterior.

La tensión superficial, σ, no es numéricamente una 'constante', depende -apreciablemente- de la temperatura, disminuyendo cuando T aumenta y anulándose en el punto crítico al desaparecer la diferenciación radical líquido-gas. Depende también del grado de pureza del líquido, de su estado eléctrico, y, en general, de todas las propiedades del líquido y del gas ambiente.

6.5. Otras magnitudes usuales.

6.5.1. Presión de vapor.

Tema estudiado en Termodinámica[10], con carácter general, y en Higrometría, de manera especial. Se denomina *presión de vapor*, p_v, a la presión parcial del vapor de agua en una atmósfera determinada. Y se denomina *presión de saturación* o presión saturante, de una atmósfera a una determinada temperatura T, a la máxima presión de vapor posible en esa atmósfera a dicha temperatura, $p_{sat}(T)$. Esta presión saturante crece con la temperatura.

6.5.2. Rugosidad.

En el movimiento de los fluidos se considera como variable importante la rugosidad de los contornos. Es una *magnitud física* que caracteriza y mide la influencia del contorno sólido en la pérdida de energía del fluido en movimiento. Se consideran dos tipos:

a) *Rugosidad absoluta*, ϵ; y

b) *Rugosidad relativa*, $\frac{\epsilon}{D}$,

de manera que la primera pretende representar el tamaño de las 'imperfecciones' (rugosidad) de la pared (tubería, canal,...) y la segunda la relación del tamaño de esas imperfecciones respecto del parámetro geométrico caracterizador del contorno (diámetro, D; anchura, b; calado, h; etc.).

10 Puede verse nuestro pre-texto *Fundamentos de Termodinámica Clásica*. ETSAM.

7. LEYES (RELACIONALES) Y PRINCIPIOS (ECUACIONALES) FUNDAMENTALES.

7.1. Leyes fundamentales relacionales de la Mecánica Clásica.

Las *leyes (relacionales) fundamentales de la mecánica clásica*, que hereda la Mecánica clásica de fluidos son:

1) Ley fundamental de la dinámica:

$$\vec{f} = C_d\, m\, \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} \tag{7.1}$$

2) Ley de la gravitación universal:

$$\vec{f} = C_g\, \frac{m_g \cdot m_g^2}{r^2}\, \frac{\vec{r}}{r} \tag{7.2}$$

3) Ley de relación de masas:

$$m_g = C_m \cdot m_i \tag{7.3}$$

La única *constante ineludible*[11] es C_m por relacionar *magnitudes inseparables*. C_d y C_g pueden hacerse $C_d = C_g = 1$, como se ha hecho formal e históricamente, reduciendo la libertad de elección de unidades de las magnitudes primarias. Por otra parte, sustituyendo (7.3) en (7.2) resulta:

$$\vec{f} = \frac{C_m \cdot m_i \cdot C_m \cdot m_i'}{r^2}\, \frac{\vec{r}}{r} = C_m^2\, \frac{m_i \cdot m_i'}{r^2}\, \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{f} = G\, \frac{m_i \cdot m_i'}{r^2}\, \frac{\vec{r}}{r}$$

siendo esta constante G la que ha pasado a la historia y a la física formal, con el nombre de *constante de la gravitación universal* y *constante gravitatoria* o *gravitacional*.

En consecuencia, las **ecuaciones fundamentales relacionales de la mecánica clásica**, eludida la masa gravitatoria, son:

1) Ley fundamental de la dinámica:

$$\vec{f} = m\, \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = m \cdot \vec{a} \tag{7.4}$$

2) Ley de la gravitación universal:

$$\vec{f} = G\, \frac{m . m'}{r^2}\, \vec{r}_o \tag{7.5}$$

---

[11] Véase el *Breviario de Teoría dimensional* del Catedrático F. González de Posada. ETSAM.

7.2. Leyes fundamentales específicas (introductorias de constantes características).

De acuerdo con lo descrito en el tema de las magnitudes físicas de la teoría, estas leyes fundamentales específicas son:

1) Ley de la viscosidad:

$$\tau = - \mu \frac{dv}{dn} \qquad (7.6)$$

2) Ley de la tensión superficial:

$$F = \sigma \cdot l \qquad (7.7)$$

3) Ley de la elasticidad volumétrica o compresibilidad:

$$dp = - D \frac{dV}{V} \qquad (7.8)$$

Estas leyes no aportan *nuevas relaciones* fundamentales entre magnitudes primarias; simplemente, definen o introducen unas constantes características de los fluidos. Formalmente, estas leyes podrían considerarse como fórmulas definidoras de nuevas magnitudes (secundarias): las *constantes características* de la teoría.

7.3. Principios fundamentales de la Mecánica Clásica.

Los principios fundamentales de la Mecánica de Fluidos son principios heredados de la Mecánica Clásica. Conceptualmente son idénticos a los de la teoría física básica, adjetiva y formalmente son diferentes al incluir los nuevos conceptos.

1°. Principio de **conservación de la masa.**

2°. Principio de **conservación de la energía.**

3°. Principio de **conservación de la cantidad de movimiento.**

De estos principios se obtienen las ecuaciones fundamentales usuales en el estudio del movimiento de los fluidos.

7.4. Notas complementarias.

a) *La complejidad: nota esencial del movimiento de los fluidos.*

En el seno de una masa fluida en movimiento, las distintas partículas (en una imagen espacial) poseen velocidades y aceleraciones diferentes unas de otras y cada una de ellas (en una imagen temporal) valores variables a lo largo de su recorrido. Esto impone unas grandes dificultades para un tratamiento matemático "exacto", aún no superadas.

b) *Hipótesis básicas.*

La 'superación' conceptual y formal de la *complejidad*, en el ámbito de la Mecánica Clásica de Fluidos, se hace mediante la aceptación de unas hipótesis usuales, que son las de **medio continuo, homogéneo, isótropo y estable.**

8. ECUACION DE CONTINUIDAD (PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA MASA)

A) ECUACIÓN GENERAL DE CONTINUIDAD

8.1. Flujo variable de un fluido compresible.

Se describe el flujo variable (no permanente o no estacionario) mediante la consideración de un campo de velocidades función de punto y tiempo

$$\vec{v}(P,t) = \vec{v}(x,y,z,t) = u(x,y,z,t)\,\vec{i} + v(x,y,z,t)\,\vec{j} + w(x,y,z,t)\,\vec{k}$$

o bien

$$\vec{v}(u,v,w)$$

Se considera el flujo a través de un paralelepípedo elemental de aristas *dx, dy, dz*, tal como se esquematiza en la Fig. 8.1.

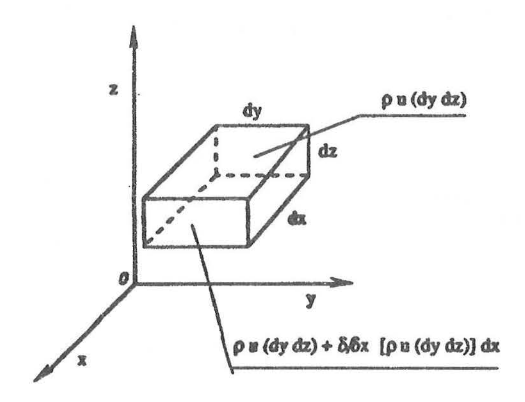


Fig. 8.1. Flujo a través de un paralelepípedo elemental.

La masa entrante por la cara perpendicular al eje *Ox* más próxima al plano *yz* en el volumen elemental por unidad de tiempo (flujo másico entrante o velocidad de flujo de masa: $[ML^{-3}]\ [LT^{-1}]\ [L^2] = MT^{-1}$) es

$$\rho u\ (dy\ dz)$$

El flujo másico saliente, de acuerdo con la teoría analítica de las funciones reales continuas, es

$$\rho\, u(dydz) + \frac{\partial}{\partial x}\,[\rho\, u(dydz)]\,dx$$

En consecuencia, el flujo másico neto entrante por las caras perpendiculares a *Ox* es

$$-\frac{\partial}{\partial x}\,(\rho\, u)\ dy\ dz\ dx$$

Análogamente, por las caras perpendiculares a los ejes *Oy* y *Oz* son:

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\, dx\, dz\, dy$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\, dx\, dy\, dz$$

El flujo neto entrante total en el elemento *dV* es

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] dx\, dy\, dz$$

El aumento de masa por unidad de tiempo en el elemento dV es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, dx\, dy\, dz) = \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

Por tanto:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] dx\, dy\, dz = \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

es decir,

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Dado que

$$\rho u\, \vec{i} + \rho v\, \vec{j} + \rho w\, \vec{k} = \rho \vec{v}$$

se obtiene finalmente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 \qquad (8.1)$$

ecuación general de continuidad para flujo variable de un fluido compresible.

8.2. Flujo permanente de un fluido compresible.

Si se considera un flujo o régimen permanente, la ecuación de continuidad (8.1) se reduce de la forma siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow div(\rho \vec{v})=0 \qquad (8.2)$$

8.3. Flujo permanente de un fluido incompresible.

Si el fluido es incompresible (consideración usual de los líquidos) en la expresión anterior resulta:

$$\rho = cte \quad \rightarrow \quad div(\rho\vec{v}) = \rho\, div\,\vec{v} = 0$$

y la ecuación de continuidad se reduce a

$$div\ \vec{v} = 0 \qquad (8.3)$$

Esta ecuación en las aplicaciones concretas admite las siguientes expresiones desarrolladas:

a) En problemas de flujo tridimensional: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$

b) En problemas de flujo bidimensional: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

c) En problemas de flujo unidimensional: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

B) ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA FLUJO PERMANENTE EN UN TUBO DE CORRIENTE

8.4. Fluido compresible.

Se considera un *tubo de corriente* (tubería imaginaria, en el interior del fluido en movimiento, a través de cuya superficie lateral -'paredes'- se considera que no hay flujo; representado en el papel por una sección plana longitudinal) y en él dos secciones (1) y (2) normales a la línea de corriente central del *tubo* como se indica en la figura 8.2.

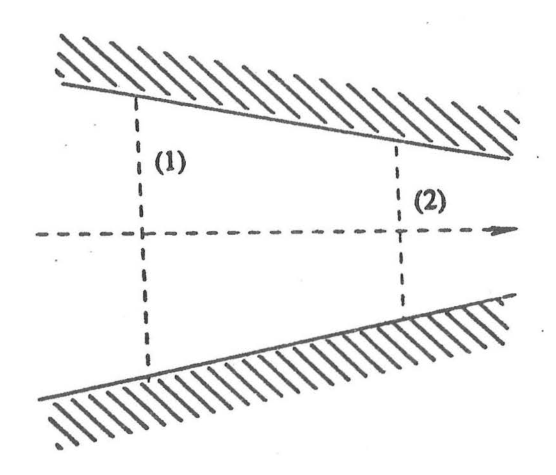


Fig. 8.2. Flujo en un tubo de corriente.

El flujo queda caracterizado en la hipótesis de valores medios de ρ y V en las secciones por:

a) en (1) por ρ_1, V_1 (normal a la sección),

b) en (2) por ρ_2, V_2 (normal a la sección);

de tal modo que:

1) el caudal másico (masa por unidad de tiempo) que atraviesa la sección (1) es $Q_1 = \rho_1 V_1 A_1$

2) el caudal másico que atraviesa la sección (2) es $Q_2 = \rho_2 V_2 A_2$.

Dado que flujo permanente implica la no variación con el tiempo y que la superficie lateral del tubo de corriente se comporta como impermeable, el caudal debe ser constante; es decir:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \rightarrow \gamma_1 V_1 A_1 = \gamma_2 V_2 A_2 \tag{8.4}$$

4.5. Fluidos incompresibles

Si el fluido es incompresible (hipótesis usual en el caso de líquidos) se verifica:

$$\rho_1 = \rho_2 \rightarrow Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = cte \tag{8.5}$$

9. ECUACION DE LA ENERGIA (PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA) (EN RÉGIMEN PERMANENTE)

9.1. Ecuación del movimiento de un fluido en régimen permanente.

Se considera (véase Fig. 9.1) una masa elemental dM con movimiento plano (paralelo al papel) y dirección x (en la hipótesis de que no existan fuerzas en dirección normal al papel).

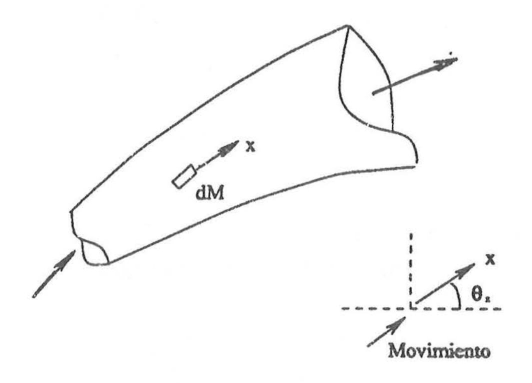


Fig. 9.1.

Las fuerzas en la dirección x (véase Fig. 9.2) son:

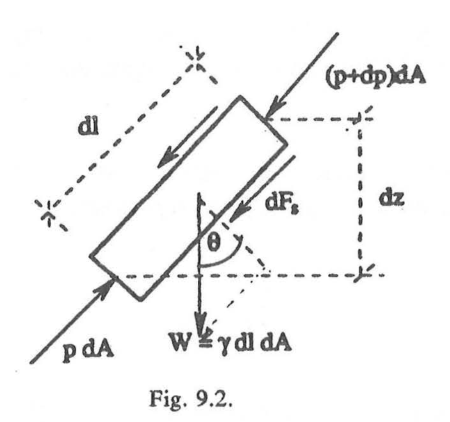


Fig. 9.2.

1. Presiones sobre las caras extremas.
2. Peso.
3. Fuerzas tangenciales o cortantes (laterales), de valor τ por unidad de superficie (ejercidas por la fricción viscosa).

La ecuación del movimiento (ecuación fundamental de la dinámica newtoniana aplicada a dM) en la dirección x es

$$\sum F_x = (dM)\, a_x \tag{9.1}$$

es decir:

$$p dA - (p+dp)dA - \gamma dA dl sen\theta_x - dF_s = \frac{\gamma dA dl}{g}\frac{dV}{dt} \tag{9.2}$$

Dividiendo la ecuación anterior por (γ *dA*), la nueva ecuación se expresa en alturas, y considerando un *dl* tal que

$$\frac{dl}{dt} = V$$

se obtiene

$$\frac{p}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} - \frac{dp}{\gamma} - dl\ sen\ \theta_x - \frac{dF_s}{\gamma\ dA} = \frac{V\ dV}{g} \tag{9.3}$$

Por otra parte

$$dF_s = \tau\ dP\ dl \tag{9.4}$$

considerando (τ x perímetro x longitud) = (τ x superficie lateral), que representa la resistencia que se opone al movimiento en la longitud dl; de modo que

$$\frac{dF_s}{\gamma dA} = \frac{\tau\ dP\ dl}{\gamma dA} \tag{9.5}$$

donde

$$\frac{dA}{dP} = R \tag{9.6}$$

área de la sección dividida por el perímetro mojado se denomina *radio hidráulico* de la sección. El trabajo realizado por las fuerzas tangenciales representa la pérdida de energía del fluido en el flujo.

Los términos de la ecuación (9.3), representan energías por unidad de peso (es decir, medidas en 'altura'). De esta manera, la (9.5) representa

$$\frac{dF_s}{\gamma dA} = \frac{\tau dl}{\gamma R} = dh_L \tag{9.7}$$

es decir, la pérdida de energía a lo largo del flujo (pérdida de carga) por unidad de peso ('alturas'), como puede verse por la fórmula dimensional:

$$\frac{[p]}{[\gamma]} = \frac{\dfrac{[F]}{[S]}}{\dfrac{[F]}{[V]}} = L \tag{9.8}$$

Sustituyendo y operando en (9.3) se obtiene la *ecuación diferencial del movimiento permanente* de un fluido

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{VdV}{g} + dz + dh_L = 0 \tag{9.9}$$

9.2. Ecuación de Euler.

Si se considera un *fluido ideal* o perfecto, es decir, carente de viscosidad y, por tanto, con $\tau = 0$, se verifica que $dh_L = 0$ en la ecuación anterior; o lo que es lo mismo, se trataría de un flujo con pérdida de carga nula. En este caso, (9.9) se reduce a

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{VdV}{g} + dz = 0 \tag{9.10}$$

que se denomina *ecuación de Euler*.

A) APLICACION A FLUIDOS INCOMPRESIBLES

9.3. Ecuación de Bernoulli o ecuación de la energía.

Los fluidos incompresibles (hipótesis usual en líquidos) son aquellos cuya densidad, ρ, es constante, y, en consecuencia, γ es constante también. Integrando la ecuación (9.9) entre dos puntos 1 y 2:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \int_1^2 \frac{VdV}{g} + \int_1^2 dz + \int_1^2 dh_L = 0 \tag{9.11}$$

se obtiene

$$\frac{1}{\gamma}(p_2 - p_1) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + (z_2 - z_1) + H_L = 0$$

o bien

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) - H_L = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) \tag{9.12}$$

que recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli* o *ecuación de la energía.*

Esta ecuación constituye la fórmula más importante de la Hidráulica para las aplicaciones prácticas del movimiento de fluidos. Es conveniente hacer unas **consideraciones complementarias** de sumo interés.

1ª. H_L representa la pérdida de energía mecánica por unidad de peso entre dos posiciones determinadas, (1) y (2), a lo largo del flujo, por conversión -mediante proceso irreversible (fricción viscosa, trabajo de las fuerzas de rozamiento)- en energía calorífica.

2ª. **Ecuación general de la energía en la dirección del flujo.** La ecuación anterior puede ampliarse -generalizarse- introduciendo en su contenido las variaciones *locales* de la energía (discontinuidades puntuales en la línea media del flujo) motivadas por la presencia de dispositivos hidráulicos de la forma siguiente:

Energía en Sec.(1) + Energía añadida - Energía perdida - Energía extraída = Energía Sección (2)
(ej. bomba) (lineal) (ej. turbina)

En consecuencia, en los flujos permanentes de fluidos incompresibles, la ecuación general puede escribirse de la forma:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) + H_A - H_L - H_E = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) \tag{9.13}$$

cuyos términos se expresan en *kgm/kg* de fluido (energía por unidad de peso o altura). La práctica totalidad de problemas con flujo de líquidos se resuelven con esta ecuación. En el caso de flujo de gases, existen frecuentemente fenómenos de transferencia de calor que deben tenerse en cuenta, y, además, en tanto que fluidos son compresibles.

3ª. **En torno a la altura de velocidad.** El término $V^2/2g$ representa la 'altura de velocidad' en la ecuación de Bernoulli (energía cinética por unidad de peso o 'altura cinética'), siendo V la 'velocidad media'. La distribución de velocidades en una sección no es uniforme. Por ello, suele razonarse de la manera siguiente:

a) La energía cinética de una 'partícula' con $dM = \rho\, v\, dA$, es

$$\frac{1}{2}\,(dM)\,v^2$$

siendo v la velocidad del fluido en un punto genérico de la sección.

b) La energía cinética total del fluido en una sección A es:

$$\frac{1}{2}\int_A (dM)v^2 = \frac{1}{2}\int_A \frac{\gamma}{g}\,(v\,dA)\,v^2 = \frac{\gamma}{2g}\int_A (dQ)\,v^2$$

c) La energía cinética media en una sección transversal al flujo calculada para la velocidad media, $v = \bar{v}$, es

$$\frac{1}{2}\left(\gamma\frac{Q}{g}\right)\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{g}\bar{v}A\right)\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma A}{g}\,\bar{v}^3$$

d) Se introduce un *coeficiente de corrección,* α, de modo que

$$\alpha\,\frac{\gamma A}{2g}\,\bar{v}^3 = \frac{\gamma}{2g}\int_A v\,(dA)\,v^2$$

es decir,

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^3 dA \tag{9.14}$$

En consecuencia, la altura cinética 'correcta' en la *ecuación de Bernoulli* sería:

$$h_c = \alpha \frac{V^2}{2g} \tag{9.15}$$

siendo V, la velocidad media en la sección recta, denominada $\bar{v}$ anteriomente. Los valores aproximados de α son:

$\alpha = 1$ en la hipótesis de distribución uniforme de velocidades.

$\alpha = 1{,}02$ a $1{,}15$ en los *flujos turbulentos*.

$\alpha = 2{,}00$ en los *flujos laminares*.

En la práctica suele utilizarse el valor $\alpha = 1$, ya que no se introducen grandes errores, en general, si la 'altura de velocidad' representa un pequeño porcentaje de la 'altura total' (de la energía del flujo).

4ª. **Líneas de energía.**

La *línea de 'alturas totales'* es la representación gráfica de la energía total de cada sección (en 'altura': energía por unidad de peso) respecto de un plano de referencia. Tiene pendiente decreciente en el sentido del flujo. Presenta discontinuidades en las secciones con dispositivos mecánicos de intercambio de energía: crece, si se añade energía al flujo (p.e. con una bomba); y decrece, si se extrae energía del flujo (p.e. con una turbina).

La *línea de 'alturas piezométricas'* es la representación gráfica de la energía no cinética de cada sección (en 'altura': energía por unidad de peso) respecto de un plano de referencia. Está situada por debajo de la línea de 'alturas totales' en una cantidad igual a la 'altura cinética' en cada sección. Representa la suma de la 'altura de presión' y la 'altura geométrica' respecto del plano de referencia. La ordenada piezométrica entre el eje de la corriente y la línea piezométrica es la 'altura de presión'. Esta *línea piezométrica* es paralela a la *línea de 'alturas totales'* en los tramos con secciones rectas de área constante.

9.4. Potencia de una corriente fluida.

En determinados tipos de problemas interesa conocer la *potencia* (energía por unidad de tiempo) del flujo. Una expresión de ésta puede obtenerse, a partir de la expresión clásica de la energía potencial, de la manera siguiente:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{mgH}{t} = \frac{m\gamma H}{t\rho} = \frac{V\gamma H}{t} = \gamma Q H \tag{9.16}$$

donde V representa volumen.

B) APLICACION AL CASO DE FLUIDOS COMPRESIBLES (GASES IDEALES)

9.5. Consideraciones generales de los flujos de gases ideales.

El cálculo de la integral

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma}$$

de la ec. (9.9) no puede hacerse en este caso de fluido compresible según (9.11) ya que γ no es constante y se exige conocer $\gamma = \gamma(p)$, lo que depende de las condiciones termodinámicas del flujo. Se establecen, usualmente, dos hipótesis (dos condiciones, dos casos) de estudio: a) flujo en condiciones isotermas; b) flujo en condiciones adiabáticas.

9.6. Flujo de un gas ideal en condiciones isotermas.

Se considera el flujo de un gas ideal a temperatura constante. De la *ecuación de estado de los gases ideales*

$$pV = nRT \tag{9.17}$$

y teniendo en cuenta la condición de flujo isotermo (T = cte) y considerando una sección (1) de valores conocidos, se obtiene:

$$T = cte \;\Rightarrow\; pV = cte \;\Rightarrow\; \frac{p}{\gamma} = cte \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{\gamma_1}{p_1}\,p \tag{9.18}$$

donde p representa la presión absoluta del gas ideal.

Sustituyendo en (9.11)

$$\int_1^2 \frac{dp}{\left(\frac{\gamma_1}{p_1}\right)p} + \int_1^2 \frac{VdV}{g} + \int_1^2 dz + \int_1^2 dh_L = 0$$

e integrando, resulta:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma_1}\right)\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + (z_2 - z_1) + H_L = 0$$

obteniéndose la expresión usual de la *ecuación de Bernoulli* para flujo de un fluido compresible

$$\left(\frac{p_1}{\gamma_1}\ln p_1 + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) - H_L = \left(\frac{p_1}{\gamma_1}\ln p_2 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right) \tag{9.19}$$

que con la *ecuación de continuidad*

$$\gamma_1 A_1 v_1 = \gamma_2 A_2 v_2 \tag{9.20}$$

y la *ecuación de estado*

$$\frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{p_2}{\gamma_2} \tag{9.21}$$

constituyen el trío de ecuaciones fundamentales para el estudio de estos problemas.

9.7. Flujo de un gas ideal en condiciones adiabáticas.

En la hipótesis de que el flujo tenga lugar sin intercambio de calor con los alrededores, es decir, en régimen adiabático, las variables termodinámicas verifican la *ecuación de Poisson*

$$p\,V^k = cte \tag{9.22}$$

donde k es el *coeficiente adiabático*

$$k = \frac{c_p}{c_v} \tag{9.23}$$

siendo c_p y c_v los calores específicos del gas a presión y volumen constante, respectivamente.

En consecuencia:

$$p_1 V_1^k = p V^k \Rightarrow \frac{p}{p_1} = \frac{V_1^k}{V^k} = \frac{\rho^k}{\rho_1^k} = \frac{\gamma^k}{\gamma_1^k} \Rightarrow \gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{9.24}$$

y la integral del primer término de la ecuación general es:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\gamma_1}\int_1^2 \frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} = \frac{k}{k-1}\frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\gamma_1}\left(p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{k-1}{k}}\right) = \frac{k}{k-1}\frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\gamma_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]$$

Por tanto, la *ecuación de Bernoulli* resulta de la forma

$$\left(\frac{k}{k-1}\frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\gamma_1} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right) - H_L = \left[\frac{k}{k-1}\frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\gamma_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] \tag{9.25}$$

que unida a la *ecuación de continuidad*

$$\gamma_1 A_1 V_1 = \gamma_2 A_2 V_2 \tag{9.26}$$

y a la *ecuación de Poisson*

$$\frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\gamma_1} = \frac{p_2^{\frac{1}{k}}}{\gamma_2} \tag{9.27}$$

constituyen el trío de ecuaciones fundamentales para el estudio de estos problemas.

10. ECUACION DEL IMPULSO-CANTIDAD DE MOVIMIENTO (PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO)

10.1. Consideraciones generales básicas.

En los temas anteriores se han desarrollado los formalismos elementales correspondientes a dos principios fundamentales de la mecánica: los de conservación de la masa y conservación de la energía. Hay un tercer principio fundamental -el de conservación de la cantidad de movimiento- que adquiere un significado especial en el estudio de los *dispositivos hidráulicos*: bombas, turbinas, cuerpos en movimiento (aviones, barcos, hélices, cohetes, submarinos, naves espaciales, ...), edificios, fuentes, elementos desviadores de corrientes fluidas, etc. Para el estudio de estos dispositivos hidráulicos, en relación con el movimiento de los fluidos, es ineludible el conocimiento de las *fuerzas ejercidas* por, o contra, los fluidos.

10.2. Ecuación del impulso-cantidad de movimiento.

Este principio de la dinámica newtoniana puede considerarse como otra forma de la *ecuación fundamental de la dinámica*:

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{10.1}$$

$$\vec{f}\,dt = m\,d\vec{v} = d(m\vec{v}) \tag{10.2}$$

Integrando entre dos secciones (1) y (2) por las que pasa una masa m de fluido en un intervalo de tiempo t:

$$\vec{f}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \tag{10.3}$$

o bien

$$m\vec{v}_1 + \vec{f}t = m\vec{v}_2 \tag{10.4}$$

siendo estas dos últimas las expresiones vectoriales del *principio del impulso-cantidad de movimiento* donde $\vec{f}$ es la suma vectorial (resultante) de las fuerzas actuantes.

En la mayoría de los casos usuales el movimiento de un fluido tiene lugar en un plano (vertical u horizontal). Por esto, suele ser conveniente utilizar las expresiones relativas a las componentes escalares:

$$mv_{x_1} + \Sigma f_x t = mv_{x_2} \Rightarrow \Sigma f_x = \frac{m}{t}\,(v_{x_2} - v_{x_1}) = \rho Q(v_{x_2} - v_{x_1}) \tag{10.5}$$

$$mv_{y_1} + \Sigma f_y t = mv_{y_2} \Rightarrow \Sigma f_y = \frac{m}{t}\,(v_{y_2} - v_{y_1}) = \rho Q(v_{y_2} - v_{y_1}) \tag{10.6}$$

que tienen en cuenta el caudal que fluye y la densidad del fluido, magnitudes mecánicas más apropiadas en el estudio del movimiento de los fluidos.

11. HIDROSTATICA

11.1. Objetivo del tema.

El proyectista debe *conocer* (saber calcular) las **fuerzas** que ejercen los fluidos (en reposo) para diseñar las estructuras que los contienen, y, en su caso, las sumergidas.

Conocer las fuerzas -en plural- implica:

a) Conocer su ***distribución***: localización, módulo, dirección y sentido.

b) Conocer su ***resultante***: localización, módulo, dirección y sentido.

En el estudio hidrostático se consideran siempre ***presiones manométricas***[12].

11.2. La Hidrostática desde una perspectiva general.

a) Desde una perpectiva más elemental, puede decirse que si una masa fluida es *homogénea* (uniforme) y está en *reposo* la energía es constante en todos los puntos (carencia de diferencias, equipotencial); hablando de energías por unidad de peso,

$$h = \frac{p}{\gamma} + z \tag{11.1}$$

debe ser constante en toda la *masa fluida*, siendo *h* altura piezométrica -carga hidráulica estática-: suma de la altura de presión más la altura de posición (geométrica) respecto de un plano de referencia[13].

b) Desde una perspectiva formal más general (visión dinámica con anulación del movimiento), puede afirmarse que la **ecuación del equilibrio estático de los fluidos** (en particular de los líquidos: fluidos pesados, incompresibles, ideales o reales) es:

$$\vec{grad}\ h = \vec{grad}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p}{\gamma} + z = cte$$

En consecuencia, las *superficies isobaras* son horizontales (condición necesaria y suficiente). Esta conclusión constituye el importante y clásico "**Principio de Pascal**".

11.3. Presión en el interior de una masa líquida.

Si se considera un líquido (fluido pesado, incompresible, ideal o natural) en equilibrio

---

[12] Nota importante. Aunque parece superfluo conviene explicitar que el tema se refiere al planeta Tierra y, en especial, a la zona en torno de su superficie tierra-mar.

[13] Este formalismo, en cuanto tal, es idéntico al de la *teoría de Darcy* de nuestro libro *Hidráulica del medio permeable*. UPM.

estático con superficie libre a presión $p = p_0$, en general, o a $p = p_0 = p_{atm}$, la presión en un punto (1) interior se puede expresar

$$\frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \Rightarrow p_1 - p_2 = \gamma(z_0 - z_1) = \gamma h_1 \Rightarrow p_1 = p_o + \gamma h_1$$

donde, como es usual, las z (alturas geométricas, cotas) se consideran positivas hacia arriba y las h (profundidades) hacia abajo, lo que si bien facilita la comprensión física y lingüística del tema puede confundir algebráicamente.

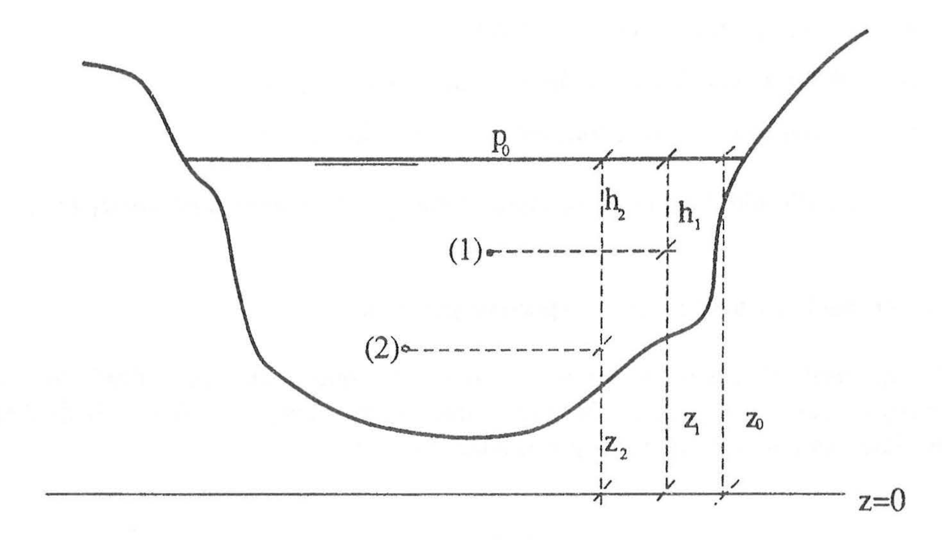


Fig. 11.1. Presión en el interior de una masa líquida.

En general, la *presión* en el interior de la masa líquida puede expresarse de la forma:

$$p = p_0 + \gamma h \tag{11.2}$$

y la *diferencia de presión* entre dos puntos interiores (1) y (2) de esta otra, independiente de p_0:

$$p_2 - p_1 = \gamma(h_2 - h_1) \tag{11.3}$$

Plano de carga.

En la Fig. 11.2. se muestra el denominado "plano de carga", plano que representa la altura que, sobre el nivel real del líquido, tendría una cantidad de dicho líquido que ejerciera la misma presión p_0 que la atmósfera sobre dicha superficie. En consecuencia:

$$\frac{p_0}{\gamma} = h_0$$

Con otras palabras, aunque sea reiteración, la altura del plano de carga sobre la superficie libre de un líquido pesado, incompresible, ideal o real, en equilibrio estático, en cuya superficie reina la presión atmosférica, es el espesor del mismo líquido que habría que poner sobre éste para que sustituida la atmósfera ejerciera una presión idéntica.

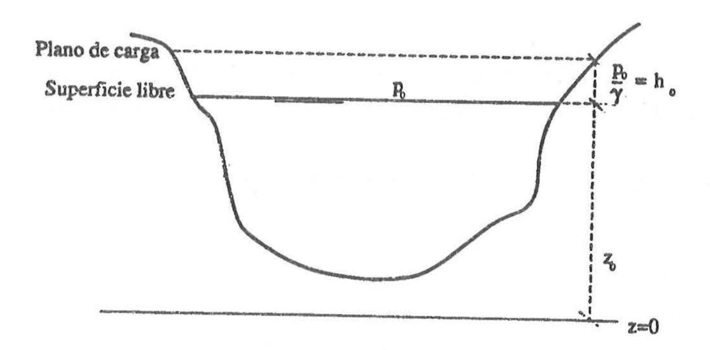


Fig. 11.2. Plano de carga.

Presión absoluta y presión manométrica o relativa.

Con objeto de obviar en los cálculos la acción de la atmósfera o la consideración del "plano de carga" se introduce el concepto de presión manométrica o relativa (**aditiva, no multiplicativa**) respecto de la atmosférica.

La presión atmósférica es p_{atm} = 1 atm = 1'033 kg/cm^2 = 760 $mm\ Hg$[14]. La presión absoluta en el interior de un líquido es

$$p = p_{atm} + \gamma h \tag{11.4}$$

de modo que

$$p_{man} = p - p_{atm} = \gamma h \tag{11.5}$$

es la presión manométrica o relativa respecto de la atmosférica.

11.4. Ejercicio de aplicación: Fuerza hidrostática sobre una superficie plana.

Sea una superficie plana cualquiera de área A sumergida en el seno de un fluido (p.e. líquido -agua-), superficie que forma un ángulo θ con un plano horizontal (p.e. la superficie libre del líquido agua).

El plano de la superficie plana intersecta con el plano horizontal según una recta. Se considera una sección plana vertical, perpendicular a dicha recta de intersección, que pasa por un punto O de la recta (véanse Fig. 11.3 y 11.4). En la Fig. 11.3, se representa la distribución de presiones sobre la superficie.

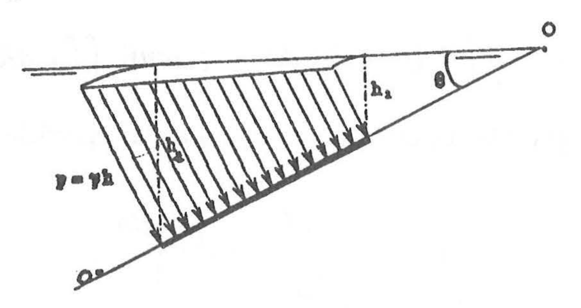


Fig. 11.3. Distribución de presiones sobre una superficie plana sumergida en el seno de un fluido.

14 Se han expresado en el texto los valores técnicos usuales. En el SI: 1 atm = 1'033 kg/cm^2 = 101234 Pa.

El objeto consiste en determinar la *fuerza resultante* de la distribución de presiones sobre la superficie real plana: *valor* (vectorial: módulo, dirección y sentido) y *posición*.

a) Valor de la fuerza resultante de la presión hidrostática.

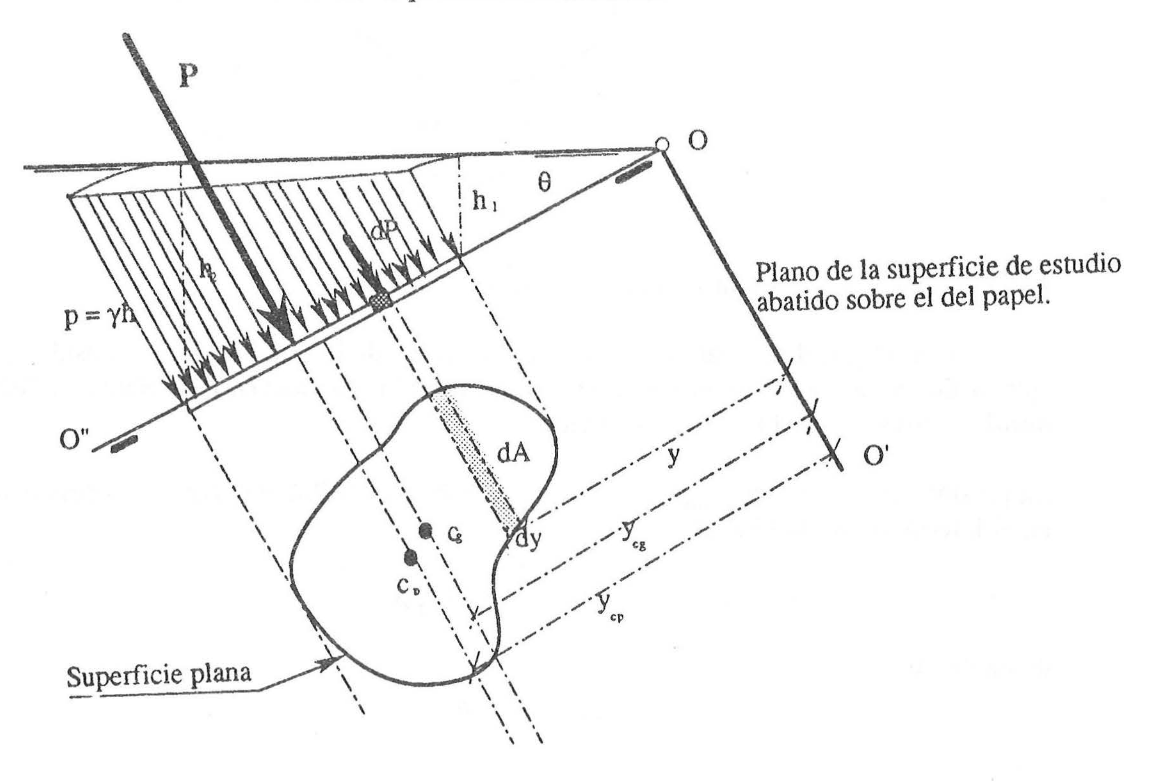


Fig. 11.4. Fuerza resultante de la presión.

Hay que determinar el *valor* (*vectorial*: módulo, dirección y sentido). La dirección es perpendicular a la superficie y el sentido 'contra' la superficie considerada, dada la naturaleza de la presión cuyo efecto consiste en una acción contra *A*, perpendicular a ésta en todos sus puntos. Hay que calcular expresamente el módulo (valor escalar). El cálculo puede hacerse así:

$$dP = p\, dA = \gamma\ h\ dA$$

$$h = y\ sen\theta$$

$$P = \iint \gamma\ (y\ sen\theta)\ dA = \gamma\ sen\theta \iint y\ dA$$

Dado que el centro de gravedad es el centro de figura de la superficie plana,

$$y_{cg} = \frac{\iint y dA}{\iint dA} = \frac{\iint y dA}{A}$$

y se obtiene, por tanto,

$$P = \gamma\ sen\theta\ y_{cg}\ A = \gamma\ h_{cg}\ A$$

es decir,

$$P = p_{cg}\ A \tag{11.6}$$

b) Posición de la fuerza resultante de la presión hidrostática.

1) *Distancia al eje OO' en el plano superficial.*

Tomando momentos respecto al eje *OO'*:

$$\iint dP \cdot y = P \cdot y_{cp}$$

$$\iint \gamma\ (y\ sen\theta)\ y\ dA = \gamma\ sen\theta \iint y^2\ dA = \gamma\ sen\theta\ I_{00'} = \gamma\ h_{cg}\ A\ y_{cp}$$

donde $I_{OO'}$ es el momento de inercia de la superficie respecto del eje *OO'* (recta de intersección con la superficie libre). En consecuencia, de los dos últimos miembros, se deduce:

$$y_{cp} = \frac{I_{00'}}{y_{cg}\ A} = \frac{I_{cg} + Ay_{cg}^2}{y_{cg}\ A} = y_{cg} + \frac{I_{cg}}{y_{cg}\ A} \tag{11.7}$$

donde se ha aplicado el Teorema de Steiner y se obtiene, finalmente, que **el centro de presiones está siempre por debajo del centro de gravedad.**

2) *Posición lateral* (distancia al plano del papel, para cuando sea necesario).

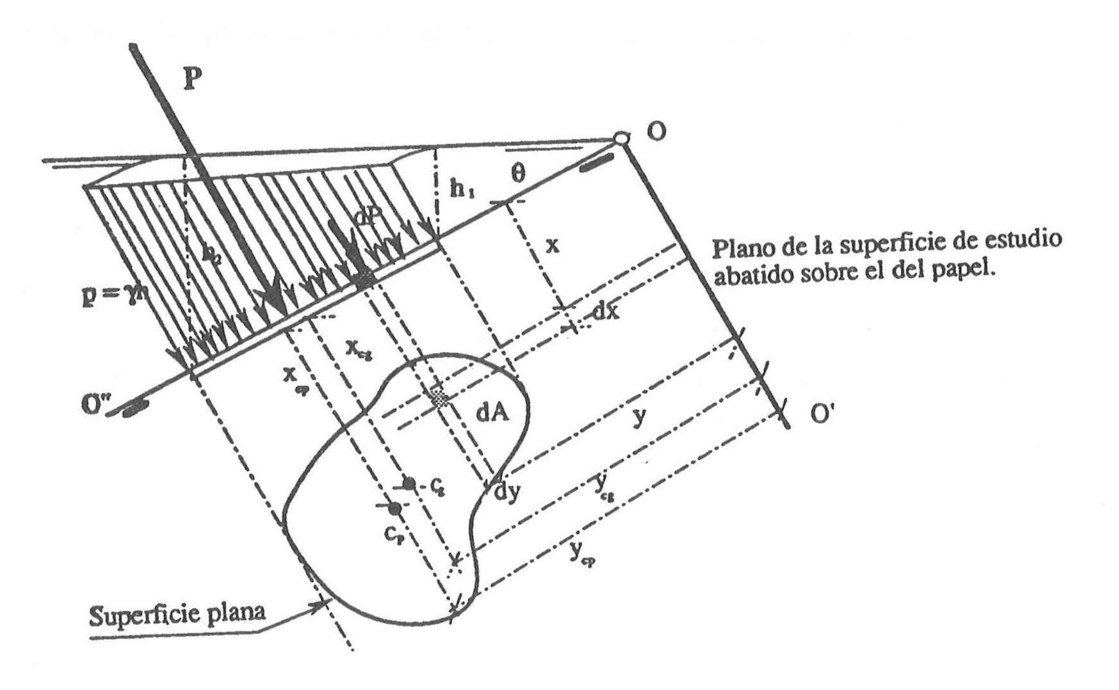


Fig. 11.5. Determinación de la posición lateral de la resultante.

Tomando momentos respecto de *OO''* (Fig. 11.5) se obtiene:

$$P\, x_{cp} = \iint_A p\, dA\, x$$

$$\gamma\, h_{cg}\, A\, x_{cp} = \iint_A \gamma\, h\, (dx\, dy)\, x = \iint_A \gamma\, y\, sen\theta\, (dx\, dy)\, x = \gamma\, sen\theta \iint_A xy\, dx\, dy$$

$$\gamma\, y_{cg}\, sen\theta\, A\, x_{cp} = \gamma\, sen\theta\, I_{xy}$$

$$x_{cp} = \frac{I_{xy}}{y_{cg}\, A} = \frac{(I_{xy})_{cg} + x_{cg}\, y_{cg}\, A}{y_{cg}\, A}$$

$$x_{cp} = \frac{(I_{xy})_{cg}}{y_{cg}\, A} + x_{cg} \qquad (11.8)$$

Como nota complementaria de interés conviene insistir en que la superficie libre del líquido se considera de presión manométrica nula.

La presión sobre una superficie cualquiera es la presión sobre la superficie proyectante.

12. FLUJO DE FLUIDOS EN TUBERIAS

12.1. Introducción.

Resolución de problemas prácticos, referidos a fluidos reales, donde se presentan fuerzas 'cortantes' debidas al rozamiento con las paredes (externas o de contorno) y a la viscosidad del fluido (internas). El uso de la ecuación de la energía no permitiría resolver el problema. Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales obtenidas no admiten solución teórica. Los flujos de fluidos reales se resuelven, de ordinario, a partir de datos experimentales y mediante métodos semiempíricos.

12.2. Tipos de flujo permanente en caso de fluidos reales.

Se consideran dos tipos de flujo que pueden tratarse como 'extremos' y que se denominan y caracterizan cualitativamente de las formas siguientes:

a) *Flujo laminar* aquél que tiene lugar según trayectorias paralelas, capas, láminas, filetes.

b) *Flujo turbulento* aquél que tiene lugar de modo desordenado, caótico, que se presenta con imposibilidad de conocer la 'trayectoria' de una partícula; y

c) *Flujo de transición* aquellos intermedios entre los considerados 'extremos'.

Estos tipos de flujo o régimen deben caracterizarse no sólo cualitativamente, sino también, como corresponde a las teorías físicas establecidas, cuantitativamente. Con esta finalidad se utiliza la magnitud característica del fluido viscosidad y el parámetro adimensional denominado *Número de Reynolds*.

La *viscosidad* es la magnitud física primordial para el estudio de los fluidos reales. En el caso de flujo laminar se utiliza la clásica fórmula o ley de Newton:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dn} \qquad (12.1)$$

Se denomina *velocidad crítica* aquella por debajo de la cual la turbulencia se anula por la viscosidad.

Para clasificar estos tipos de flujo se considera el parámetro adimensional que relaciona las fuerzas de inercia y las de fricción viscosa, denominado *Número de Reynolds* que se define mediante la expresión

$$R = \frac{v.d}{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (12.2)$$

donde d es el diámetro de la tubería a flujo lleno o a presión, μ es la viscosidad del fluido y ρ = su densidad. El *Número de Reynolds* es un parámetro que integra elementos fundamentales de la geometría del *conducto* (d), de la *naturaleza del fluido* (μ, ρ) y del *movimiento* (v).

Este parámetro adimensional se usa como base para la clasificación de los regímenes:

$R < 2.000$, laminar.

2000 < R < 18.000, transición.

R > 18.000, turbulento. Se considera que se ha alcanzado un pleno desarrollo de la turbulencia para valores de R > 18.000.

12.3. Expresiones de la tensión cortante en el flujo turbulento.

Existen diferentes fórmulas para expresar la tensión cortante en el movimiento de los fluidos.

1. Como complemento de la *ecuación de Newton* se considera la fórmula

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{dv}{dn} \tag{12.3}$$

donde μ es la viscosidad y η un término representativo de la turbulencia y que se considera función de la densidad y del movimiento, $\eta(\rho, v)$.

2. Fórmula de PRANDTL.

$$\tau = \rho \ell^2 \left(\frac{dv}{dn}\right)^2 \tag{12.4}$$

donde ℓ representa la denominada *longitud de mezcla*, longitud de recorrido necesario para que una solución concentrada introducida en la corriente por un tubito capilar, se mezcle (disperse) en el fluido (véase Fig. 12.1); es función de la distancia al contorno, $\ell(y)$.

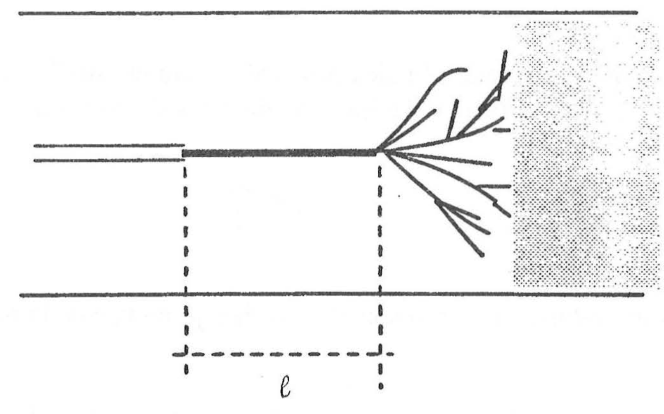


Fig. 12.1. Longitud de mezcla.

3. Fórmula de VON KARMAN.

$$\tau = \tau_o\left(1 - \frac{y}{r_o}\right) = \rho k^2 \frac{\left(\frac{dv}{dy}\right)^4}{\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)^2} \tag{12.5}$$

donde k es adimensional y de valor aproximado 0'40.

12.4. Distribución de tensiones cortantes en una sección recta de una tubería circular, horizontal y con flujo en régimen permanente.

En la Fig. 12.2. se representa un esquema del problema a tratar, cuyo estudio se somete a las hipótesis siguientes:

a) Para $r = 0 \rightarrow \tau = 0$

b) Para $r = r_o \rightarrow \tau$ es máxima

c) Variación lineal

d) Validez para flujos laminares y turbulentos.

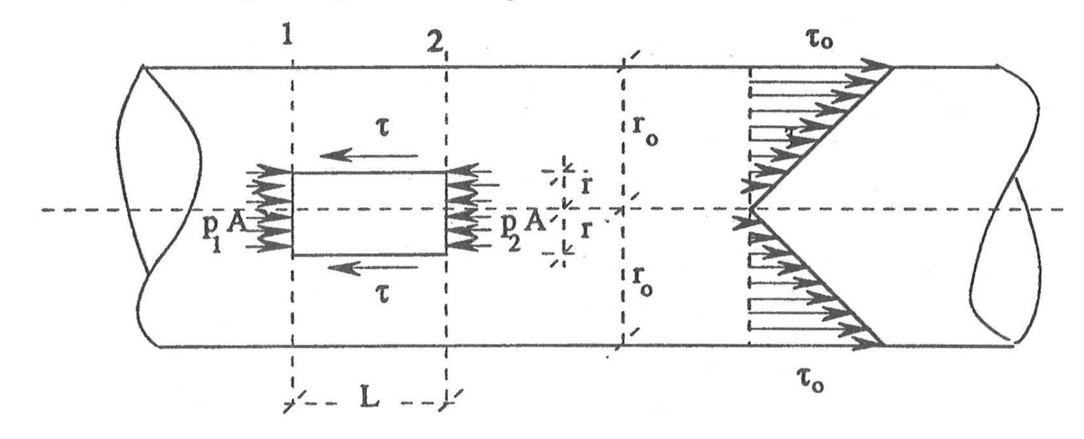


Fig. 12.2. Hipótesis para el estudio de las *tensiones cortantes*.

Dado que se considera régimen permanente (es decir, independiente de *t*)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

En consecuencia, la suma de todas las fuerzas que actúan según el eje *x* es nula; es decir,

$$p_1 \cdot \pi r^2 - p_2 \cdot \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r L = 0$$

de donde se deduce

$$\tau = \frac{(p_1 - p_2) r}{2L} \tag{12.6}$$

La ecuación anterior puede escribirse de las formas siguientes:

a) Multiplicando y dividiendo por γ, de la forma

$$\tau = \frac{\gamma r}{2L} \left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right) \tag{12.7}$$

b) Considerando

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h_L \tag{12.8}$$

de la forma

$$\tau = \frac{\gamma h_L}{2L} r \tag{12.9}$$

que pueden interpretarse fácilmente con ayuda de la Fig. 12.3.

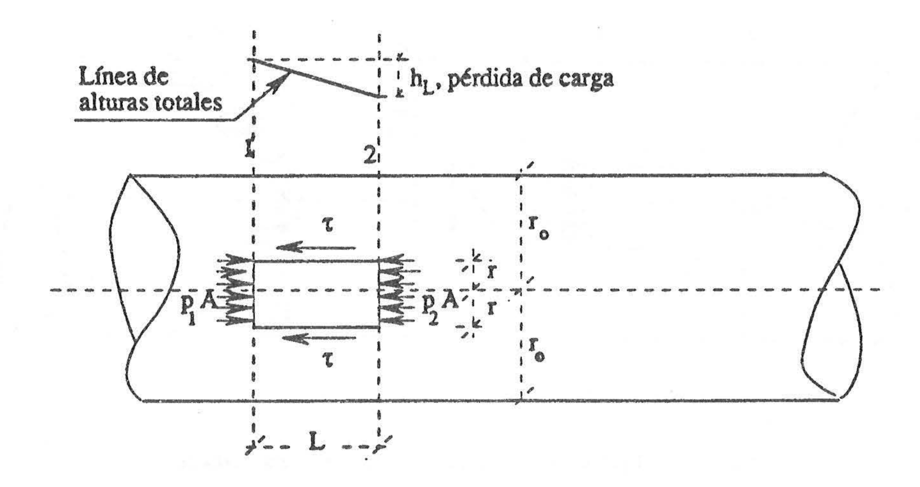


Fig. 12.3. Pérdida de carga lineal.

12.5. Tensión cortante en la pared de la tubería.

Aplicando $\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h_L$ a las condiciones de la pared ($r = r_o$, $\tau = \tau_o$), se deduce:

$$h_L = \frac{2\tau_o L}{\gamma r_o} = \frac{4\tau_o L}{\gamma d} \tag{12.10}$$

La fórmula clásica de DARCY-WEISBACH de las *pérdidas lineales* a lo largo de una tubería es

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \tag{12.11}$$

Igualando (12.9) y (12.10) resulta:

$$\frac{4\tau_o L}{\gamma d} = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

y de ésta se deducen:

a)

$$\tau_o = f \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{8} = f \rho \frac{v^2}{8} \tag{12.12}$$

tensión cortante que suele expresarse en kg/m^2; y

b)

$$f = \frac{8\tau_o}{\rho v^2}$$

donde *f*, *coeficiente de fricción*, es una relación entre la energía disipada por fricción y la energía cinética del fluido.

Por otra parte, a $\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = v_*$ se denomina *velocidad de cizalladura o de corte*. Así:

$$f = 8\,\frac{v_*}{v^2}$$

12.6. Distribución de velocidades en una sección recta de un flujo laminar y permanente.

En el flujo laminar se considera válida la *fórmula de Newton*

$$\tau = -\mu\,\frac{dv}{dn}$$

Igualando esta expresión de τ a la obtenida anteriormente, (12.6), resulta

$$\tau = -\mu\,\frac{dv}{dn} = \frac{(p_1 - p_2)r}{2L} \qquad (12.13)$$

donde $(p_1\text{-}p_2)/L$ no es función de r. Integrando entre el eje de la tubería ($r = 0$, $v = v_c$) y un punto genérico (r,v) se obtiene:

$$-\int_{v_c}^{v} dv = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L}\int_0^r r\,dr$$

$$-(v - v_c) = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu L}$$

$$v = v_c - \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu L} \qquad (12.14)$$

Teniendo en cuenta que $h_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ se obtiene

$$v = v_c - \frac{\gamma h_L r^2}{4\mu L} \tag{12.15}$$

Aceptando la hipótesis usual de que en el contorno, $r = r_o$, $v = 0$; sustituyendo en la ecuación (12.14) se obtiene la velocidad en el eje de la tubería

$$0 = v_c - \frac{(p_1 - p_2) r_o^2}{4\mu L} \quad \rightarrow \quad v_c = \frac{(p_1 - p_2) r_o^2}{4\mu L} \tag{12.16}$$

En consecuencia, la distribución de velocidades en una sección recta de una tubería, $v(r)$, es

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (r_o^2 - r^2) \tag{12.17}$$

que expresa v como función cuadrática (parabólica) de r (Fig. 12.3).

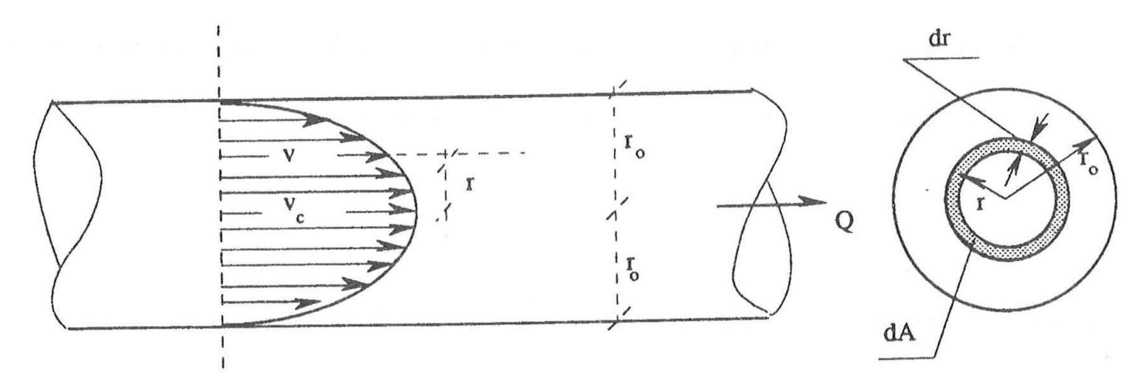


Fig. 12.4. Distribución de velocidades en una sección de una tubería.

ESTUDIO DE LAS PÉRDIDAS DE CARGA

12.7. Pérdidas de carga en flujo laminar permanente de un fluido incompresible.

La velocidad media del flujo en una sección de la tubería puede obtenerse, teniendo en cuenta (12.17), de la forma siguiente:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int v dA}{\int dA} = \frac{\int_o^{r_o} v(2\pi r dr)}{\pi r_o^2} = \frac{2\pi (p_1 - p_2)}{\pi r_o^2 (4\mu L)} \int_o^{r_o} (r_o^2 - r^2) r dr$$

de donde se deduce

$$V = \frac{(p_1 - p_2) r_o^2}{8\mu L} \tag{12.18}$$

velocidad media que es igual a la mitad de la velocidad máxima, $v_c/2$.

La pérdida de carga según la fórmula de HAGEN-POISEUILLE es

$$h_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{8\mu L V}{\gamma r_o^2} = \frac{32\mu L V}{\gamma d^2} \tag{12.19}$$

válida para flujo laminar de cualquier fluido y para cualquier tubería.

Teniendo en cuenta la expresión del número de Reynolds, se obtiene la expresión

$$h_L = \frac{64}{R}\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{12.20}$$

y también la clásica de DARCY-WEISBACH

$$h_L = f\,\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{12.21}$$

de la pérdida de carga en una tubería de diámetro d y longitud L.

En el caso de régimen laminar (para números de Reynolds < 2000), se verifica en todas las tuberías, para cualquier fluido, siendo f = 64/R.

12.8. Pérdida de carga en flujo turbulento permanente de un fluido incompresible

En los casos de régimen turbulento se utiliza esa misma ecuación (12.21) pero con otros valores de f:

$$h_L = f\,\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}$$

Destacamos algunas de las fórmulas prácticas más usuales.

1. En tuberías lisas.

a) Fórmula de Blasius ($3000 \leq R \leq 100.000$)

$$f = \frac{0'316}{R^{0'25}} \tag{12.22}$$

b) Fórmula de Karman-Prandtl ($R \leq 3.000.000$)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\,\log(R\sqrt{f}) - 0'8 \tag{12.23}$$

2. Tuberías rugosas. Siendo ϵ la rugosidad

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{r_o}{\epsilon} + 1'74 \qquad (12.24)$$

3. En tuberías rugosas o lisas

a) Las fórmulas de pérdida de carga pueden obtenerse de

$$f = \frac{8\tau_o}{\rho v^2} = \frac{8v_o^2}{v^2} \qquad (12.25)$$

b) Con carácter general se utiliza la ecuación de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3'7d} + \frac{2'51}{R\sqrt{f}} \right) \qquad (12.26)$$

de modo que en *Diagramas* se han relacionado los valores de f, R, y ϵ/d, siendo ϵ/d la rugosidad relativa de la tubería.

En tuberías lisas $\epsilon/d \rightarrow 0$ y así la fórmula anterior es equivalente a la fórmula (12.23). Tanto la rugosidad absoluta como la relativa deben estimarse.

12.9. Pérdidas de carga locales.

En todo tipo de perturbación (accesorios, conexión tubería-depósito, boquilla, orificio, contracción o expansión, válvulas, codos, etc.) sobre la regularidad de la tubería se producen unas pérdidas de carga que se denominan *locales*. Con carácter general se consideran para ellas expresiones cuadráticas con la velocidad media del flujo

$$h = K \frac{v^2}{2g} \qquad (12.27)$$

estimándose unos valores indicativos de los coeficientes K en diferentes casos.

MEDIDAS EN FLUJOS DE FLUIDOS

12.10. Tubo de Pitot.

Se emplean numerosos dispositivos para medidas de velocidades, entre ellos el denominado *tubo de Pitot*, que se utiliza para medir la velocidad en un punto de la corriente. [En realidad mide la presión de estancamiento que supera a la presión local en $\gamma(v^2/2g)$]. En la Fig. 12.5. se representa el uso hipotético de un *tubo de Pitot* en una tubería.

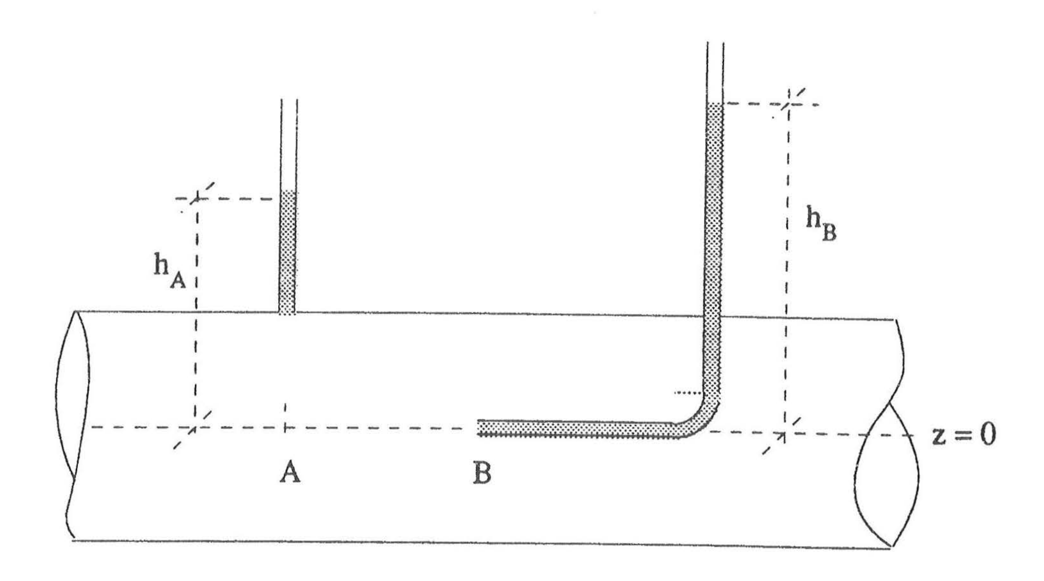


Fig. 12.5. Tubo de Pitot en una tubería.

Aplicando la *ecuación de Bernoulli* entre las secciones A y B, se obtiene:

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + 0\right) - (pérdidas) = \frac{p_B}{\gamma} + 0 + 0$$

y, aceptando que no hay pérdidas de energía entre A y B, se obtiene

$$\frac{v_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} - \frac{p_A}{\gamma}$$

o bien

$$v_A = \sqrt{2g\,\frac{p_B - p_A}{\gamma}} = \sqrt{2g(h_B - h_A)} \qquad (12.28)$$

Para tubos reales hay que multiplicar v_A por un coeficiente que depende de la forma del tubo. Estos aparatos, en todo caso, deben calibrarse antes de su uso.

CUADERNO

20.01